
Pauta - Prueba N°3

1. Dadas las circunferencias $C_1 : x^2 + y^2 - 2x + 4y = 0$ y $C_2 : x^2 + y^2 + 2x + 6y = 0$.

- (a) Encontrar la distancia entre los centros de las circunferencias.
- (b) Encontrar la ecuación de la recta L_1 generada por los centros de ambas circunferencia.
- (c) Encontrar la ecuación de la recta L_2 perpendicular a L_1 y generada por el punto medio de los centros de las circunferencias.

Desarrollo:

Encontrando la el centro y el radio de las circunferencias, se tiene:

$C_1 : x^2 + y^2 - 2x + 4y = (x-1)^2 + (y+2)^2 = (\sqrt{5})^2$; su centro $C_1(1, -2)$ y su radio $r = \sqrt{5}$

$C_2 : x^2 + y^2 + 2x + 6y = (x+1)^2 + (y+3)^2 = (\sqrt{10})^2$; su centro $C_2(-1, -3)$ y su radio $r = \sqrt{10}$

- (a) Los centros son: $C_1(1, -2)$ y $C_2(-1, -3)$ (3 puntos), entonces la distancia es:

$$d = \sqrt{(-3 - (-2))^2 + (-1 - 1)^2} = \sqrt{5} \text{ (2 puntos)}$$

- (b) Los centros son: $C_1(1, -2) = (x_1, y_1)$ y $C_2(-1, -3) = (x_2, y_2)$, entonces la pendiente $m_{L_1} = \frac{-3 + 2}{-1 - 1} = \frac{1}{2}$. Por lo tanto la ecuación de la recta es:

$$L_1 : y + 2 = \frac{1}{2}(x - 1) \text{ o } x - 2y - 5 = 0 \text{ (5 puntos)}$$

- (c) Como L_1 y L_2 son perpendiculares, entonces $m_{L_1} \cdot m_{L_2} = -1$; así $\frac{1}{2} \cdot m_{L_2} = -1$. Por lo tanto $m_{L_2} = -2$.

El punto medio de $C_1(1, -2)$ y $C_2(-1, -3)$ es $P_M = \left(0, -\frac{5}{2}\right)$.

Entonces la recta L_2 de pendiente $m_{L_2} = -2$ y que pasa por el punto $P_M = \left(0, -\frac{5}{2}\right)$ es:

$$L_2 : y - \frac{5}{2} = -2(x - 0) \text{ o } 2x + y = \frac{5}{2} \text{ (5 puntos)}$$

2. Un artículo que cuesta \$9 se vende en \$52 y otro que cuesta \$99 se vende en \$142. Si la política general de precios viene dada por una relación lineal.

- (a) Encontrar la ecuación lineal que represente el precio, p , de venta en términos del costo c .

- (b) Determinar el costo de un artículo que se vende en \$80.
- (c) Encontrar el precio de venta de un artículo que cuesta \$35.

Desarrollo:

- (a) De acuerdo a los datos, tenemos los siguientes puntos: $(9, 52) = (x_1, y_1)$ y $(99, 142) = (x_2, y_2)$. Entonces la pendiente de la relación lineal es: $m = \frac{142 - 52}{99 - 9} = \frac{90}{90} = 1$ y por tanto la relación esta determinada por:

$$p - 52 = 1(c - 9) \quad o \quad p = c + 43 \quad (5 \text{ puntos})$$

- (b) Para determinar el costo de un artículo que se vende en \$80, reemplazamos el valor \$80 en p y despejamos c , es decir,

$$80 = c + 43 \iff c = 37 \quad (4 \text{ puntos})$$

Resp: El costo del artículo es \$37 (1 punto)

- (c) Para determinar el precio de venta de un artículo que cuesta \$35, reemplazamos el valor \$35 en c y despejamos p , es decir,

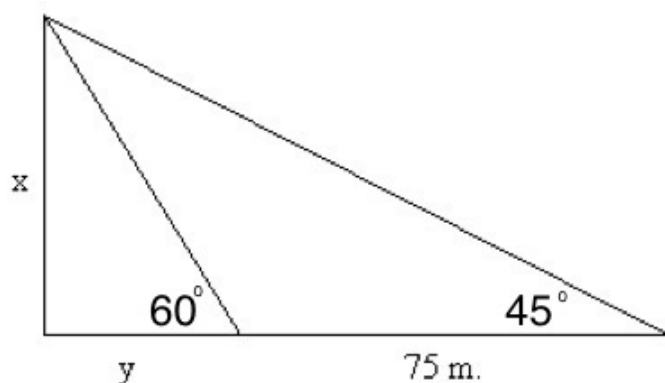
$$p = 35 + 43 \iff p = 78 \quad (4 \text{ puntos})$$

Resp: El precio de venta del artículo es \$78 (1 punto)

3. Calcular la altura de un edificio que se observa desde un punto en que el ángulo de elevación es 60° y, alejándose 75 m. de ese punto, el ángulo de elevación es ahora 45° .

Desarrollo:

Una representación gráfica de la situación es:



Observando la figura anterior, se obtiene:

$$\tan 60^\circ = \frac{x}{y} \quad y \quad \tan 45^\circ = \frac{x}{y + 75} \quad (4 \text{ punto})$$

$$\sqrt{3} = \frac{x}{y} \quad y \quad 1 = \frac{x}{y + 75} \quad (4 \text{ punto})$$

$$y\sqrt{3} = x \quad y \quad y + 75 = x \text{ (1 punto)}$$

Despejando x en ambas ecuaciones e igualando se tiene $\sqrt{3}y = y + 75$ (1 punto) de donde

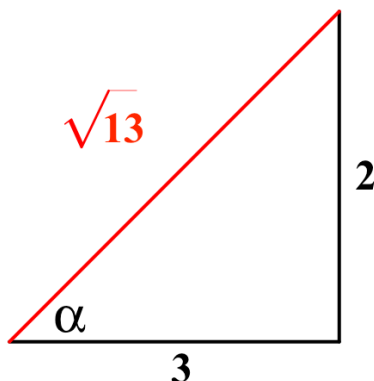
$$y = \frac{75}{\sqrt{3}-1} m \text{ (2 punto)}. \text{ Reemplazando este valor de } y, \text{ se tiene que } x = \frac{75\sqrt{3}}{\sqrt{3}-1} m \text{ (2 punto)}.$$

Resp: Por lo tanto, la altura del edificio es de $\frac{75\sqrt{3}}{\sqrt{3}-1} m$ (1 punto).

4. Si $\tan \alpha = \frac{2}{3}$, calcular el valor de:

$$E = (\cot \alpha)^2 - 2(\csc \alpha \cdot \cos \alpha) + 3(\sec \alpha)^2$$

Desarrollo:



Respecto a la figura anterior, se obtienen las siguientes relaciones trigonométricas:

$$\sin \alpha = \frac{2}{\sqrt{13}} \quad \cos \alpha = \frac{3}{\sqrt{13}} \text{ (3 puntos)} \quad \tan \alpha = \frac{2}{3}$$

$$\csc \alpha = \frac{\sqrt{13}}{2} \text{ (3 puntos)} \quad \sec \alpha = \frac{\sqrt{13}}{3} \text{ (3 puntos)} \quad \cot \alpha = \frac{3}{2} \text{ (3 puntos)}$$

Por lo tanto:

$$E = \left(\frac{3}{2}\right)^2 - 2\left(\frac{\sqrt{13}}{2} \cdot \frac{3}{\sqrt{13}}\right) + 3\left(\frac{\sqrt{13}}{3}\right)^2 = \frac{9}{4} - 2 \cdot \frac{3}{2} + 3 \cdot \frac{13}{9} = \frac{9}{4} - 3 + \frac{13}{3} = \frac{43}{12} \text{ (3 puntos)}$$
